CORE Metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С РАЦИОНАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Е.Р. Бибило, Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

elena.bibilo@mail.ru, vankova_tn@grsu.by, i.martynov@grsu.by

Если уравнение $f(x^{(n)},\ldots,x,z)=0$ имеет решение $x=\sum_{k=0}^{\infty}h_k(z-z_0)^{k-s}$, то этому решению будем сопоставлять набор $(s;h_0;r_1,r_2,\ldots,r_n)$, где $k=r_m$ — резонансы, h_{r_m} — резонансные коэффициенты. Среди резонансов r_k есть один равный -1. Остальные резонансы должны быть целыми и различными [1].

Рассмотрим уравнение

$$x^2x^{IV}=2xx'x''+4xx''^2-2x'^2x''-2x^5+\alpha x^2x''+2cx^3, \tag{1}$$

где $\alpha'=0, c''=0$, соответствующие наборы

$$(2;\pm6;-1,-3,6,8),\quad (1;h_0;-1,0,3,6),\quad (-2;h_0;-1,0,-3,6),$$

и уравнение

$$y^{IV}=20yy''+10y'^2-40y^3+\alpha(y''-6y^2)-4\beta y-2H_1, \tag{2}$$

которому отвечают наборы $(2;1;-1,2,5,8)$, $(2;3;-1,-3,8,10)$.

Выполнив в (1) замену переменной $x'=-\omega x$, для ω запишем уравнение

$$\omega^{IV}=10\omega^2\omega''+10\omega\omega'^2-6w^5+\alpha(\omega''-2\omega^3)-4c\omega-2c'. \tag{3}$$

Уравнение (3) встречается в [2], а при $\alpha=0$ в работе [3]. Имеют место

Теорема 1. *Уравнения (3) при $c'=0$ и (2) связаны между собой преобразованием Беклунда*

$$2\omega=-\frac{y'''-12yy'-\alpha y'}{y''-6y^2-\alpha y-c},\quad 2y=-\omega'+\omega^2.$$

Теорема 2. *Общие решения уравнений (1), (2) и (3) при $c'=0$ мероморфны.*

Замечание 1. При $\alpha=c=0$ уравнение (1) имеет рациональное решение $x==\pm6(z-z_0)/((z-z_0)^3+h)$, отвечающее резонансу $r=-3$.

Замечание 2. При $\alpha=\beta=H_1=0$ уравнение (2) имеет рациональное решение $y=3(z-z_0)((z-z_0)^3-2h)/((z-z_0)^3+h)$, отвечающее резонансу $r=-3$.

Литература

1. Ванькова Т. Н., Мартынов И. П., Парманчук О. Н., Пронько В. А. *О некоторых аналитических свойствах решений алгебраических дифференциальных уравнений* // Вестн. Гродненского гос. ун.-та. Сер. 2. 2008. №1(64). С. 8–16.

2. Cosgrove, C. M. *Higher-order Painlevé equations in the polynomial class I. Bureau symbol P2 variable* // Stud. Appl. Math. 2000. P. 1–76.

3. Мартынов, И. П. *О дифференциальных уравнениях с неподвижными критическими особыми точками* // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, №10. С. 1780–1791.